6.4 Variačné úlohy s voľnými koncovými bodmi v R2

V článku 6.2 sme sa zaoberali funkcionálom

$$v[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), x'(t)]dt \qquad (6.1)$$

pričom sme predpokladali, že dané koncové body $A = (t_0, x_0), B = (t_1, x_1)$ sú pevné. Predpokladajme teraz, že bod $A = (t_0, x_0)$ je pevný a bod $B = (t_1, x_1)$ je voľný. Uvedené podmienky sa nazývajú prirodzené okrajové podmienky. Všeobecnejším prípadom bude úloha s oboma nepevnými koncovými bodmi. Je zrejmé, že trieda prípustných kriviek bude širšia.

podobným postupom ako v Sekcií 2 dostávame

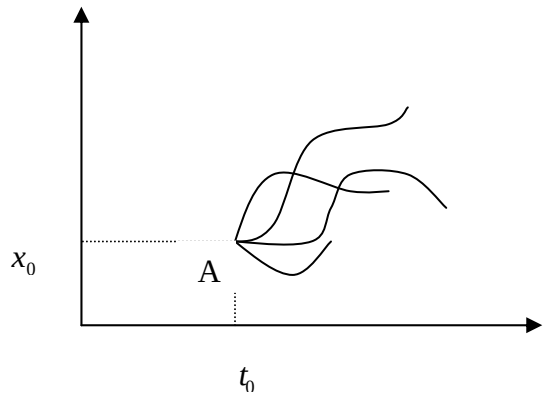
$$\delta v = [F_{x'}\delta x]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right\} \delta x dt.$$

Z okrajovej podmienky $x(t_0) = x_0$ dostávame $\delta x(t_0) = 0$. Všetky extremály $x(t)$, na ktorých môže daný funkcionál nadobúdať extrém, sú riešeniami Eulerovej rovnice

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0,$$

splňujú podmienku $x(t_0) = x_0$ a nasledujúce podmienky, pre rôzne možností polohy pohyblivého bodu $B = (t_1, x_1)$:

1. $\delta t_1, \delta x_1$ sú nezávislé



t_1, x_1 nie sú určené, $x(t)$ splňuje Eulerovu rovnicu

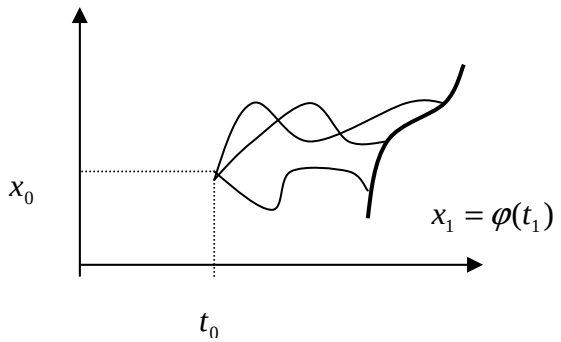
$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0$$

a podmienky

$$(F - x'F_{x'})|_{t=t_1} = 0; \quad F_{x'}|_{t=t_1} = 0.$$

2. $\delta t_1, \delta x_1$ sú závislé

- Ak $x_1 = \varphi(t_1)$, tak $\delta x_1 \approx \varphi'(t_1)\delta t_1$.



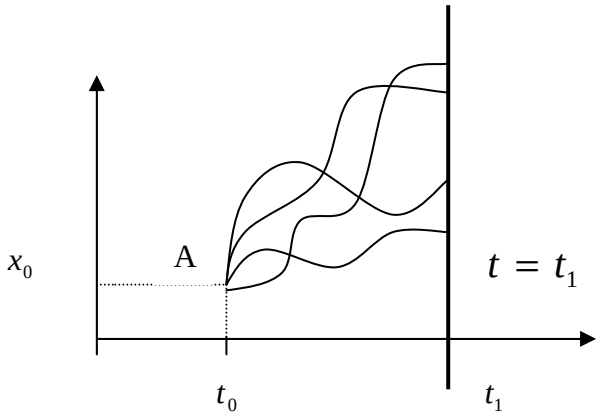
$x(t)$ splňuje Eulerovu rovnicu

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0$$

a podmienku

$$\left[F + (\varphi' - x')F_{x'}\right]_{t=t_1} = 0$$

nazývanú *podmienka transverzality*.



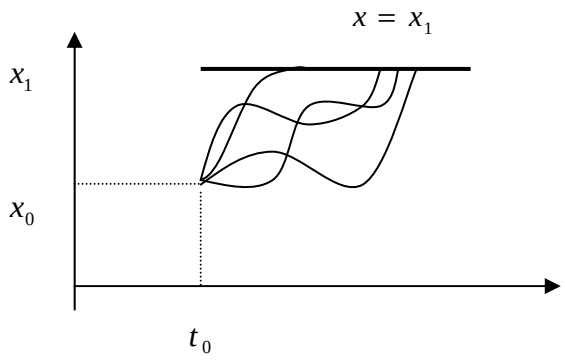
- Ak $x = t_1$, tak $\delta t_1 = 0$.

$x(t)$ splňuje Eulerovu rovnicu

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0$$

a podmienku

$$F_{x'}|_{t=t_1} = 0 .$$



- Ak $x = x_1$, tak $\delta x_1 = 0$.

$x(t)$ splňuje Eulerovu rovnicu

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0$$

a podmienku

$$\left(F - x'F_{x'}\right)|_{t=t_1} = 0 .$$

Analogicky dostaneme podmienky pre „voľný“ bod $A = (t_0, x_0)$.